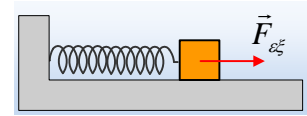


Από τη σύνθεση σε μια εξαναγκασμένη!

Ένα σώμα μάζας $m=0,1\text{kg}$ έχει εξίσωση κίνησης $x=2\sigma\upsilon\nu(20t) - 2\cdot\eta\mu(20t)$ (μονάδες στο S.I.).

- i) Να υπολογίστε την κινητική ενέργεια του σώματος τη στιγμή $t_1=\pi/40\text{s}$. Έχει δυναμική ενέργεια το σώμα τη στιγμή αυτή και αν ναι, πόση είναι αυτή;
- ii) Το ίδιο σώμα, δένεται στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=8\text{N/m}$ και με την επίδραση μιας αρμονικής εξωτερικής δύναμης, εκτελεί ταλάντωση με απομάκρυνση $x=0,5\cdot\eta\mu(10t)$ (S.I.), ενώ δέχεται και δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{\alpha\upsilon}=-0,2\cdot\upsilon$ (S.I.).
 - α) Να βρεθούν οι εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο.
 - β) Ποιες οι αντίστοιχες εξισώσεις της δύναμης επαφής και της δύναμης απόσβεσης, σε συνάρτηση με το χρόνο;
 - γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εξωτερικής δύναμης, σε συνάρτηση με το χρόνο ($F_{\epsilon\zeta-t}$).
 - δ) Για τη χρονική στιγμή $t_1=\pi/30\text{s}$, να βρεθεί η ισχύς της εξωτερικής δύναμης, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της δύναμης απόσβεσης. Δίνεται $\eta\mu(\pi/12) \approx 0,26$.



Απάντηση:

- i) Η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$x=2\sigma\upsilon\nu(20t) - 2\cdot\eta\mu(20t) = 2\cdot\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cdot\eta\mu(20t + \pi)$$

Αλλά τότε η κίνηση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως επαλληλία δύο αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, με το ίδιο πλάτος 2m , την ίδια γωνιακή συχνότητα $\omega=20\text{rad/s}$ και διαφορά φάσης:

$$\Delta\varphi = (20t + \pi) - \left(20t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Αλλά τότε το πλάτος της «σύνθετης ταλάντωσης» είναι:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 2\sqrt{2}\text{m}$$

$$\text{Ενώ } \epsilon\varphi\vartheta = \frac{A_2}{A_1} = 1 \rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{4}$$

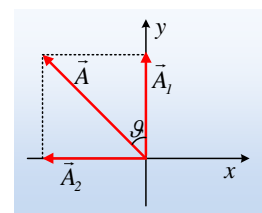
Και η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$x = 2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{3\pi}{4}\right) \quad (\text{S.I.})$$

Σχόλιο:

Αλήθεια, πολύ τυπική και «ψυχρή» δεν είναι η παραπάνω διαδικασία;

Αν χρησιμοποιούσαμε όμως δύο περιστρεφόμενα διανύσματα με μήκη $A_1=2\text{m}$ και $A_2=2\text{m}$, όπως στο διπλανό σχήμα, κάποια στιγμή όπου $t=0$ ή $t=NT$, τότε το πλάτος της ταλάντωσης,



είναι το διάνυσμα A , το μέτρο του οποίου υπολογίζεται από το πυθαγόρειο θεώρημα, ενώ η γωνία θ , μας δείχνει πόσο προηγείται το διάνυσμα \vec{A} του \vec{A}_1 .

Αλλά τότε η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t_1 είναι ίση:

$$v = 2\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{3\pi}{4}\right) = 40\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(20 \cdot \frac{\pi}{40} + \frac{3\pi}{4}\right) = 40\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{4}\right) \text{ ή}$$

$$v = 40\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -40\text{m/s}$$

Οπότε το σώμα έχει κινητική ενέργεια:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} 0,1 \cdot 40^2 \text{ J} = 80\text{J}$$

Δεν ξέρουμε, αν το σώμα έχει ή δεν έχει δυναμική ενέργεια. Η εξίσωση $x = 2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{3\pi}{4}\right)$ μας

λέει ότι η απομάκρυνση μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο, αλλά δεν σημαίνει ότι η κίνηση είναι υποχρεωτικά και ΑΑΤ!

Αν είναι πράγματι ΑΑΤ, τότε θα έχει και δυναμική ενέργεια:

$$U_1 = \frac{1}{2} D x_1^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_1^2 = \frac{1}{2} 0,1 \cdot 20^2 \cdot \left(2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)^2 \text{ J} = 80\text{J}$$

ii) Το σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $x=0,5 \cdot \eta\mu(10t)$ οπότε για ταχύτητα και επιτάχυνση έχουμε:

α) $v = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t)$ (S.I.) και

$a = -\omega^2 A \cdot \eta\mu(10t) = -50 \cdot \eta\mu(10t)$ (S.I.)

β) $F_{\varepsilon\pi} = -D \cdot x = -k \cdot x = -8 \cdot 0,5 \cdot \eta\mu(10t) = -4 \cdot \eta\mu(10t)$ (S.I.) και

$F_{\alpha\pi} = -b \cdot v = -0,2 \cdot 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) = -1 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t)$ (S.I.)

γ) Παίρνοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα έχουμε $\Sigma F = ma$ ή

$$F_{\varepsilon\zeta} + F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\pi} = ma \rightarrow$$

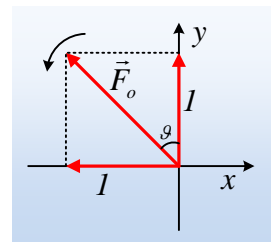
$$F_{\varepsilon\zeta} - Dx - b v = ma \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\zeta} - 4 \cdot \eta\mu(10t) - 1 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) = -5 \cdot \eta\mu(10t) \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\zeta} = 1 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) - 1 \cdot \eta\mu(10t) = 1 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) + 1 \cdot \eta\mu(10t + \pi)$$

Δουλεύοντας όπως παραπάνω, με τη βοήθεια των περιστρεφόμενων διανυσμάτων, έχουμε για $t=0$, το διπλανό σχήμα, όπου κάθε διάνυσμα έχει μέτρο 1N και στρέφονται με γωνιακή συχνότητα $\omega=10\text{rad/s}$. Αλλά τότε:

$$F_o = \sqrt{I^2 + I^2} \text{ N} = \sqrt{2} \text{ N} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\vartheta = \frac{I\text{N}}{I\text{N}} = 1 \text{ ή } \vartheta = \frac{\pi}{4}$$



Αλλά τότε η εξίσωσης της εξωτερικής δύναμης, είναι της μορφής:

$$F_{εξ} = \sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

δ) Για τη στιγμή t_1 η εξωτερική δύναμη έχει τιμή:

$$F_{εξ} = \sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10 \cdot \frac{\pi}{30} + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) \approx -0,37N$$

Ενώ το σώμα έχει ταχύτητα:

$$v = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10 \cdot \frac{\pi}{30}\right) = 2,5m/s$$

$$\text{Οπότε } P_{F_{εξ}} = \frac{dW}{dt} = |F_{εξ}| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -0,37 \cdot 2,5W \approx -0,92W$$

Η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική μέσω του έργου της δύναμης απόσβεσης. Αλλά τη στιγμή αυτή η δύναμη απόσβεσης έχει τιμή:

$$F_{απ} = -1 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) = -1 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10 \cdot \frac{\pi}{30}\right) = -\frac{1}{2}N$$

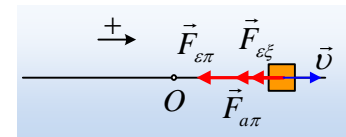
$$P_{F_{απ}} = \frac{dW}{dt} = |F_{απ}| \cdot |v| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -|F_{απ}| \cdot |v| = -\frac{1}{2} \cdot 2,5W = -1,25W$$

Αλλά τότε ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική είναι ίσος με 1,25J/s.

Σχόλιο:

Τη στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη θέση:

$$x = 0,5 \cdot \eta\mu(10t) = 0,5 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) m = 0,25\sqrt{3}m$$



έχοντας επιτάχυνση:

$$α = -50 \cdot \eta\mu(10t) = -25\sqrt{3}m/s^2, \text{ οπότε:}$$

$$\frac{dK}{dt} = (\Sigma F)v \cdot \sigma\upsilon\nu α = -mα \cdot v = -0,1 \cdot 25\sqrt{3} \cdot 2,5J/s = -6,25\sqrt{3}J/s$$

$$\frac{dU}{dt} = -|Dx||v|\sigma\upsilon\nu 180^\circ = 8 \cdot 0,25\sqrt{3} \cdot 2,5J/s = 5\sqrt{3}J/s$$

Συνεπώς η ενέργεια ταλάντωσης μεταβάλλεται με ρυθμό:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = -6,25\sqrt{3}J/s + 5\sqrt{3}J/s = -1,25\sqrt{3}J/s \approx -2,17J$$

Συμπέρασμα: Η ενέργεια ταλάντωσης μειώνεται κατά 2,17J/s. Ένα μέρος, 1,25J/s μετατρέπονται σε θερμική και το υπόλοιπο 0,92J/s αφαιρείται από το σύστημα μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης!

dmargaris@gmail.com