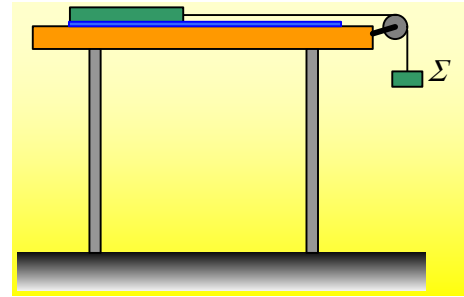


### Το ιξώδες και η κίνηση της πλάκας.

Πάνω σε ένα τραπέζι έχει στρωθεί ένα λεπτό στρώμα μηχανέλαιου πάχους  $\ell=0,1\text{cm}$ . Μια πλάκα μάζας  $m_1=0,5\text{kg}$  και εμβαδού  $A=0,2\text{m}^2$ , ηρεμεί πάνω στην γλυκερίνη. Δένουμε την πλάκα με αβαρές νήμα, το οποίο αφού περάσουμε από αβαρή τροχαλία όπως στο σχήμα, στο άλλο του άκρο του δένουμε ένα σώμα  $\Sigma$ , μάζας  $m_2=0,5\text{kg}$ , το οποίο κάποια στιγμή ( $t=0$ ) αφήνουμε να κινηθεί.

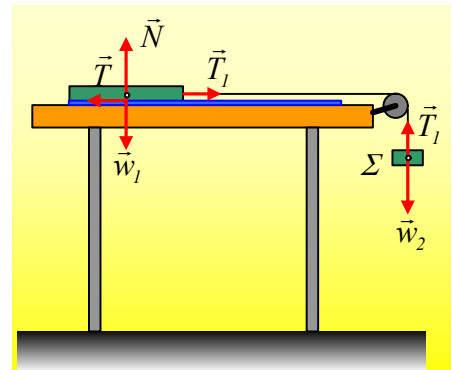


- i) Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του σώματος  $\Sigma$ .
- ii) Αν μετά από λίγο, το σώμα  $\Sigma$  αποκτά σταθερή ταχύτητα πτώσης  $v=10\text{cm/s}$ , να βρεθεί ο συντελεστής ιξώδους του μηχανέλαιου.
- iii) Ποια η επιτάχυνση της πλάκας τη στιγμή που έχει ταχύτητα  $v_1=4\text{cm/s}$ , θεωρώντας ότι κάθε στιγμή ισχύει η γνωστή εξίσωση για την τριβή που ασκείται στην πλάκα από το μηχανέλαιο.

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε πλάκα και σώμα  $\Sigma$ , όπου αφού το νήμα και η τροχαλία είναι αβαρή, η τάση του νήματος, που ασκείται στα σώματα έχει το ίδιο μέτρο  $T_1$ , ενώ  $\vec{T}$  είναι η δύναμη τριβής που δέχεται η πλάκα από το μηχανέλαιο. Η πλάκα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε  $N=w_1$ .



Η τριβή έχει μέτρο  $T = nA \frac{v}{\ell}$ , οπότε για  $t=0$ , όπου  $v=0$  δεν

ασκείται τριβή και από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για κάθε σώμα, έχουμε:

$$\text{Σώμα } \Sigma: \quad \Sigma F = m_2 \cdot a \rightarrow m_2 g - T_1 = m_2 a$$

$$\text{Πλάκα:} \quad \Sigma F_x = m_1 a \rightarrow T_1 = m_1 a$$

Τα δυο σώματα προφανώς θα κινούνται μαζί, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$m_2 g = (m_1 + m_2) a \rightarrow a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{0,5}{0,5 + 0,5} 10\text{m/s}^2 = 5\text{m/s}^2$$

- ii) Μόλις τα σώματα αποκτήσουν σταθερή ταχύτητα, θα έχουμε  $\Sigma F_\Sigma = 0$  ή  $T_1 = w_2$ , αλλά και  $\Sigma F_\pi = 0$ , οπότε:

$$T_1 = T \rightarrow m_2 g = nA \frac{v}{\ell} \rightarrow$$

$$n = \frac{m_2 g \ell}{Av} = \frac{0,5 \cdot 10 \cdot 0,1 \cdot 10^{-2}}{0,2 \cdot 0,1} = 0,25\text{N} \cdot \text{s} / \text{m}^2.$$

iii) Τη στιγμή που η ταχύτητα των σωμάτων είναι  $v_1$  η τριβή που ασκείται στην πλάκα, έχει μέτρο:

$$T = nA \frac{v}{\ell} = 0,25 \cdot 0,2 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-2}}{0,1 \cdot 10^{-2}} N = 2 N$$

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για κάθε σώμα, έχουμε για:

$$\text{Σώμα } \Sigma: \Sigma F = m_2 \cdot a_1 \rightarrow m_2 g - T_1 = m_2 a_1$$

$$\text{Πλάκα: } \Sigma F_x = m_1 a_1 \rightarrow T_1 - T = m_1 a_1$$

Τα δυο σώματα προφανώς θα κινούνται μαζί, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$m_2 g - T = (m_1 + m_2) a_1 \quad (1)$$

$$a_1 = \frac{m_2 g - T}{m_1 + m_2} = \frac{0,5 \cdot 10 - 2}{0,5 + 0,5} 10 m / s^2 = 3 m / s^2$$

### Σχόλιο για καθηγητές:

Ο παραπάνω εξίσωση (1) γράφεται:

$$m_2 g - nA \frac{v}{\ell} = (m_1 + m_2) \frac{dv}{dt} \rightarrow$$

$$(m_1 + m_2) \frac{dv}{dt} + nA \frac{v}{\ell} - m_2 g = 0$$

Η παραπάνω, είναι μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$A \frac{dx}{dt} + Bx + C = 0$$

Η λύση της οποίας είναι της μορφής  $x = \frac{-C}{B} \left( 1 - e^{-\frac{B}{A}t} \right)$  και στην περίπτωσή μας:

$$v = \frac{m_2 g}{\frac{nA}{\ell}} \left( 1 - e^{-\frac{nA}{(m_1+m_2)\ell}t} \right) = \frac{m_2 g \ell}{nA} \left( 1 - e^{-\frac{nA}{(m_1+m_2)\ell}t} \right)$$

Έτσι για  $t \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow \frac{m_2 g \ell}{nA} = 0,1 m / s$  η λεγόμενη και οριακή ταχύτητα. Στην πράξη βέβαια η ταχύτητα αυ-

τή αποκτάται σε χρονικό διάστημα  $\Delta t = 5 \frac{(m_1 + m_2) \ell}{nA} = 5 \frac{(0,5 + 0,5) \cdot 0,1 \cdot 10^{-2}}{0,25 \cdot 0,2} s = 0,1 s !!!$

Όλα αυτά βέβαια, με την προϋπόθεση, ότι η εξίσωση  $T = nA \frac{v}{\ell}$  ισχύει κάθε στιγμή και όχι μόνο όταν έχουμε σταθερή ταχύτητα, πράγμα όχι απόλυτα σωστό...

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)