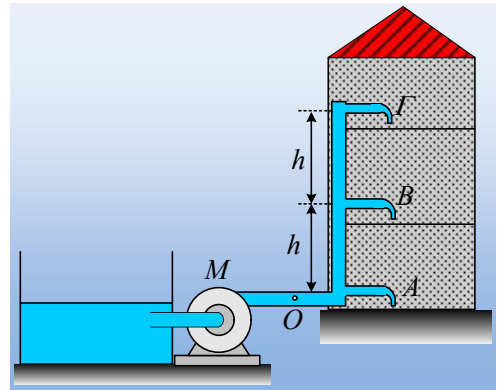


Τρεις ανοικτές βρύσες και η αντλία.

Μια τριώροφη κατοικία τροφοδοτείται με νερό από μια δεξαμενή, στην επιφάνεια του εδάφους, με την βοήθεια μιας αντλίας (M), όπως στο σχήμα. Ο κεντρικός σωλήνας τροφοδοσίας έχει ορισμένη διατομή A_1 , ενώ με πλήρως ανοικτές τις βρύσες, το νερό εξέρχεται σχηματίζοντας φλέβες με διατομές $A=0,3\text{cm}^2$. Η βρύση στο ισόγειο, βρίσκεται στο ίδιο ύψος με την αντλία, ενώ κάθε όροφος έχει ύψος $h=4\text{m}$. Η αντλία λειτουργεί αυτόματα, εξασφαλίζοντας στην έξοδό της, σταθερή πίεση $p_o=2\cdot 10^5\text{N/m}^2$. Ανοίγουμε ταυτόχρονα και πλήρως τις τρεις



βρύσες, οπότε η παροχή της βρύσης του ισόγειου είναι $0,45\text{L/s}$. Θεωρώντας μηδενικό το συντελεστή ιξώδους, ενώ δεν υπάρχουν τριβές του νερού με τα τοιχώματα και τις ροές μόνιμες και στρωτές:

- i) Να βρεθούν οι παροχές στους δύο ορόφους.
- ii) Ποια η ισχύς τη αντλίας;
- iii) Βέβαια στην πραγματικότητα, η παραπάνω ροή δεν είναι στρωτή αλλά τυρβώδης, αφού το νερό δεν έχει μηδενικό συντελεστή ιξώδους. Έτσι λειτουργώντας η αντλία με την παραπάνω ισχύ, οι τρεις παροχές είναι $\Pi_A=0,42\text{L/s}$, $\Pi_B=0,3\text{L/s}$ και $\Pi_\Gamma=0,18\text{L/s}$. Να βρεθεί η ισχύς που μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της εσωτερικής τριβής που εμφανίζεται.

Δίνεται ατμοσφαιρική πίεση $p_{at}=10^5\text{N/m}^2$ η πυκνότητα του νερού $\rho=1.000\text{kg/m}^3$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Έστω v_1 , v_2 και v_3 οι ταχύτητες εκροής στις τρεις βρύσες και v η ταχύτητα του νερού στην έξοδο της αντλίας, σημείο O.

Για την βρύση A:

$$\Pi_1=A\cdot v_1 \rightarrow v_1 = \frac{0,45 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}}{0,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 15 \text{ m/s}$$

Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου O και του σημείου εξόδου της βρύσης A στο ισόγειο:

$$p_o + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_A + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2(p_A - p_o)}{\rho} + v_1^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1 - 2)10^5}{10^3} + 15^2} \text{ m/s} = \sqrt{25} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

- Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου O και του σημείου εξόδου της βρύσης B:

$$p_o + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h \rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_o - p_B)}{\rho} + v^2 - 2gh} = \sqrt{\frac{2 \cdot (2-1)10^5}{10^3} + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4m/s} = \sqrt{145m/s} \approx 12m/s$$

Αλλά τότε η παροχή της βρύσης του α' ορόφου είναι:

$$\Pi_2 = A \cdot v_2 = 0,3 \cdot 10^{-4} \cdot 12m^3/s = 0,36L/s.$$

- Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Ο και του σημείου εξόδου της βρύσης Γ:

$$p_o + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_r + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + 2\rho gh \rightarrow$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2(p_o - p_r)}{\rho} + v^2 - 4gh} = \sqrt{\frac{2 \cdot (2-1)10^5}{10^3} + 5^2 - 4 \cdot 10 \cdot 4m/s} = \sqrt{65m/s} \approx 8m/s$$

Οπότε η παροχή της βρύσης του β' ορόφου είναι:

$$\Pi_3 = A \cdot v_3 = 0,3 \cdot 10^{-4} \cdot 8m^3/s = 0,24L/s.$$

- ii) Υπεύθυνη για την αύξηση της μηχανικής ενέργειας του νερού, κατά την μεταφορά του από την δεξαμενή, στις τρεις βρύσες, είναι η αντλία. Αλλά ο ρυθμός αύξησης της μηχανικής ενέργειας του νερού κατά την παραπάνω μεταφορά είναι:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot gh}{\Delta t} + \frac{\frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V \cdot gh}{\Delta t} + \frac{\frac{1}{2} \rho \Delta V \cdot v^2}{\Delta t} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta E_l}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Pi \left(\rho gh + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \right) \rightarrow$$

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t} = \Pi_1 \left(\rho gh + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 \right) = 0,45 \cdot 10^{-3} \left(0 + \frac{1}{2} 1.000 \cdot 15^2 \right) J/s \approx 50,6 J/s$$

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta t} = \Pi_2 \left(\rho gh + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \right) = 0,36 \cdot 10^{-3} \left(10.000 \cdot 4 + \frac{1}{2} 1.000 \cdot 12^2 \right) J/s \approx 40,3 J/s$$

$$\frac{\Delta E_3}{\Delta t} = \Pi_3 \left(2\rho gh + \frac{1}{2} \rho \cdot v_3^2 \right) = 0,24 \cdot 10^{-3} \left(10.000 \cdot 8 + \frac{1}{2} 1.000 \cdot 8^2 \right) J/s \approx 26,9 J/s$$

Αλλά τότε:

$$\frac{\Delta E_{ολ}}{\Delta t} = (50,6 + 40,3 + 26,9) J/s \approx 117,8 J/s = P_{αντλίας}$$

- iii) Το νερό που εξέρχεται στη μονάδα του χρόνου, από την Α βρύση, αφού η ροή είναι τυρβώδης, δεν είναι σταθερή. Μπορούμε όμως να βρούμε την μέση ταχύτητα εκροής:

$$v'_1 = \frac{\Pi'_1}{A} = \frac{0,42 \cdot 10^{-3} m^3/s}{0,3 \cdot 10^{-4} m^2} = 14m/s$$

Αποτέλεσμα της μεταφοράς είναι να αυξάνεται η μηχανική ενέργεια του νερού και ο ρυθμός αύξησης θα είναι:

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Pi_1 \left(\rho g h + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1'^2 \right) = 0,42 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{2} 1.000 \cdot 14^2 \right) J/s \approx 41,2 J/s$$

Με την ίδια λογική, από την βρύση Β:

$$v_2' = \frac{\Pi_2'}{A} = \frac{0,3 \cdot 10^{-3} m^3/s}{0,3 \cdot 10^{-4} m^2} = 10 m/s$$

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta t} = \Pi_2 \left(\rho g h + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2'^2 \right) = 0,3 \cdot 10^{-3} \left(1.000 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} 1.000 \cdot 10^2 \right) J/s = 27 J/s$$

Ενώ από την βρύση Γ:

$$v_3' = \frac{\Pi_3'}{A} = \frac{0,18 \cdot 10^{-3} m^3/s}{0,3 \cdot 10^{-4} m^2} = 6 m/s$$

$$\frac{\Delta E_3}{\Delta t} = \Pi_3 \left(2 \rho g h + \frac{1}{2} \rho \cdot v_3'^2 \right) = 0,18 \cdot 10^{-3} \left(2 \cdot 1.000 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} 1.000 \cdot 6^2 \right) J/s = 17,6 J/s$$

Συνεπώς η συνολική αύξηση της μηχανικής ενέργειας της ποσότητας του νερού που εξέρχεται από τις τρεις βρύσες, στη μονάδα του χρόνου, είναι ίση με $(41,2 + 27 + 17,6) J/s = 85,8 J/s$ ενώ η αντίστοιχη ενέργεια που πήρε από την αντλία είναι 117,8J/s. Αλλά τότε με βάση της διατήρηση της ενέργειας, ανά μονάδα χρόνου η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική (αυξάνοντας την εσωτερική ενέργεια του νερού και των σωλήνων) εξαιτίας των τριβών είναι:

$$P_Q = (117,8 J - 85,8) J/s = 32 J/s$$

dmargaris@gmail.com