# *Μια σύνθετη ταλάντωση και φάσεις.*

Ένα σώμα μάζας 0,2kg έχει εξίσωση κίνησης, γύρω από μια θέση y=0:

$$y = 0{,}1 \cdot ημ\left(2πt + \frac{5π}{6}\right) + 0{,}1 \cdot ημ(3πt) \quad \text{(μονάδες στο S.I.).}$$

i) Υπολογίστε το «πλάτος» και την απομάκρυνση της κίνησης για t=0. Ποια είναι η αρχική φάση της απομάκρυνσης;

ii) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του «πλάτους» και ποια χρονική στιγμή $t_1$ το πλάτος μεγιστοποιείται για πρώτη φορά;

iii) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή $t_2$=2s.

iv) Να βρεθούν η κινητική ενέργεια και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος την παραπάνω στιγμή.

Δίνεται $2ημ\frac{π}{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0{,}5$ και $π^2 \approx 10$.

### *Απάντηση:*

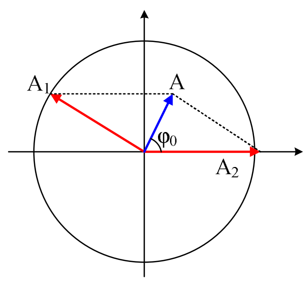
i) Για t=0 έχουμε από την εξίσωση που μας δόθηκε:

$$y = 0{,}1 \cdot ημ\left(2πt + \frac{5π}{6}\right) + 0{,}1 \cdot ημ(3πt) = 0{,}1 \cdot ημ\left(\frac{5π}{6}\right) + 0{,}1 \cdot ημ(0) = 0{,}05m$$

Εξάλλου η κίνηση του σώματος θα μπορούσε να θεωρηθεί ως σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων με εξισώσεις:

$$y_1 = 0{,}1 \cdot ημ\left(2πt + \frac{5π}{6}\right) \text{ και } y_2 = 0{,}1 \cdot ημ(3πt) \quad \text{(μονάδες στο S.I.).}$$

Αλλά τότε τη στιγμή t=0, θα μπορούσαμε να «αναπαραστήσουμε» τις δύο ταλαντώσεις με τα διανύσματα $A_1$ και $A_2$ του διπλανού σχήματος, όπου η γωνία μεταξύ τους, ίση με τη διαφορά φάσης των δύο απομακρύνσεων, είναι:




$$Δφ = 2πt + \frac{5π}{6} - 3πt = \frac{5π}{6}.$$

Για το πλάτος έχουμε:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συν\frac{5π}{6}} = A_1\sqrt{2 + 2συν\frac{5π}{6}} = 0{,}1\sqrt{2-\sqrt{3}}\,m \approx 0{,}05m$$

Ενώ η αρχική φάση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίση με $φ_0 = \frac{5π}{12}$ rad, αφού το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

**Εναλλακτικά**, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, μόνο Τριγωνομετρία, γράφοντας:

$$y = 0,1 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) + 0,1 \cdot \eta\mu(3\pi t) \rightarrow$$

$$y = 0,1 \cdot 2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi t - 2\pi t - \frac{5\pi}{6}}{2} \cdot \eta\mu \frac{3\pi t + 2\pi t + \frac{5\pi}{6}}{2} \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi t}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) \text{ (S.I.)}$$

Όπου το «πλάτος» είναι η ποσότητα:

$$A = \left|0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{5\pi}{12}\right)\right|$$

Έτσι τη στιγμή t=0 η φάση της απομάκρυνσης είναι $\varphi_0 = \left(\frac{5\pi}{2} \cdot 0 + \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{5\pi}{12}$ ενώ το πλάτος είναι ίσο με: $A = \left|0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 - \frac{5\pi}{12}\right)\right| = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0,05 m$

ii) Τη στιγμή που το πλάτος μεγιστοποιείται έχουμε:

$$\left|0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{5\pi}{12}\right)\right| = 0,2 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \pm 1 \text{ ή}$$

$$\frac{\pi t}{2} - \frac{5\pi}{12} = N\pi \rightarrow$$

$$t = 2N + \frac{5}{6}$$

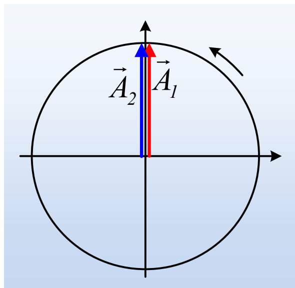
και για N=0 έχουμε: $t_1 = \frac{5}{6} s.$

***Σχόλιο:***

Τι στιγμή $t_1$ οι δύο υποθετικές ταλαντώσεις έχουν φάσεις:

$$\varphi_1 = 2\pi t + \frac{5\pi}{6} = 2\pi \cdot \frac{5}{6} + \frac{5\pi}{6} = \left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) rad \text{ και}$$

$$\varphi_2 = 3\pi t = 3\pi \cdot \frac{5}{6} = \left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) rad$$




Οι δύο ταλαντώσεις δηλαδή με απομακρύνσεις $y_1$ και $y_2$ έχουν την ίδια φάση και αν σχεδιάσουμε τα περιστρεφόμενα διανύσματα, μέσω των οποίων μπορούμε να τις μελετήσουμε, θα έχουμε την διπλανή εικόνα.

iii) Από την εξίσωση $y = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi t}{2} + \frac{5\pi}{12}\right)$ μπορούμε να υπολογίσουμε ταχύτητα και επιτάχυνση, με την βοήθεια παραγώγων. Αν δεν μας είναι αυτό δυνατόν (είτε διότι δεν ξέρουμε παραγώγους, είτε γιατί η χρήση τους δεν μας είναι τόσο εύκολη…), μπορούμε να επιστρέψουμε στη λογική της σύνθεσης και στην αρχή της επαλληλίας. Έτσι λόγω των δύο επιμέρους ταλαντώσεων, το σώμα έχει ταχύτητες ταλάντωσης:

$$\upsilon_1 = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) = 0{,}2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\upsilon_1 = 0{,}2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi \cdot 2 + \frac{5\pi}{6}\right) = -0{,}2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}1\sqrt{3}\pi \ m/s$$

$$\upsilon_2 = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(3\pi t) = 0{,}3\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(3\pi t) \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = 0{,}3\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(3\pi \cdot 2) = 0{,}3\pi \ m/s$$

Αλλά τότε με βάση την αρχή της επαλληλίας:

$$\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2 = \left(0{,}3\pi - 0{,}1\sqrt{3}\pi\right) m/s \approx 0{,}4 m/s$$

Με την ίδια λογική για τις επιμέρους επιταχύνσεις, έχουμε:

$$a_1 = -\omega^2 A \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) = -4 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$a_1 = -4 \cdot \eta\mu\left(2\pi \cdot 2 + \frac{5\pi}{6}\right) = -2 m/s^2.$$

$$a_2 = -\omega^2 A \cdot \eta\mu(3\pi t) = 0.$$

Οπότε $a = a_1 + a_2 = -2 m/s^2 + 0 = -2 m/s^2$.

iv) Τη στιγμή $t_2$ το σώμα έχει κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} m \upsilon^2 = \frac{1}{2} 0{,}2 \cdot 0{,}4^2 J = 0{,}016 J$$

Ενώ για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{(\Sigma F) dx \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = m a \cdot \upsilon \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -m|a| \cdot |\upsilon| = -0{,}2 \cdot 2 \cdot 0{,}4 J/s = -0{,}16 J/s$$

**dmargaris@gmail.com**