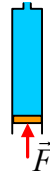


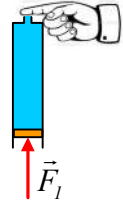
Παίζοντας με μια σύριγγα.

Έχουμε γεμίσει μια κατακόρυφη σύριγγα με νερό, κλείνοντάς την στο κάτω μέρος με έμβολο εμβαδού $A=1\text{cm}^2$ και βάρους $0,2\text{N}$, το οποίο δεν παρουσιάζει τριβές με τα τοιχώματα. Το ύψος της στήλης του νερού είναι $h=10\text{cm}$.



i) Να υπολογιστεί η απαραίτητη δύναμη F που πρέπει να ασκούμε στο έμβολο για την ισορροπία του.

ii) Κλείνουμε με το δάκτυλο το άνω άνοιγμα της σύριγγας, διατομής ίσης με το $1/5$ της διατομής του κύριου σωλήνα και αυξάνουμε την τιμή της δύναμης σε $F_1=2,2\text{N}$. Πόση δύναμη πρέπει να ασκούμε με το δάκτυλο στο άνοιγμα για να μην έχουμε διαρροή νερού και ποια η πίεση στην πάνω επιφάνεια του εμβόλου;



iii) Κάποια στιγμή ($t=0$) τραβάμε το δάκτυλο και μεταβάλλοντας κατάλληλα την ασκούμενη δύναμη F στο έμβολο, πετυχαίνουμε το έμβολο να κινείται με σταθερή $u=0,1\text{m/s}$. Με τον τρόπο αυτό το νερό εκτινάσσεται κατακόρυφα προς τα πάνω.

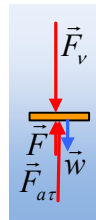
α) Σε πόσο ύψος πάνω από την σύριγγα θα φτάσει το νερό, αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα;

β) Να βρεθεί η πίεση στην πάνω πλευρά του εμβόλου σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at}=10^5\text{N/m}^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho=1.000\text{kg/m}^3$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$. Με το τράβηγμα του δακτύλου, να θεωρείστε ότι αποκαθίσταται, σχεδόν άμεσα, μόνιμη και στρωτή ροή, χωρίς εσωτερικές τριβές ή τριβές του νερού με τα τοιχώματα, ενώ καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος η σύριγγα συγκρατείται σε σταθερή θέση.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο έμβολο, όπου F_{at} η δύναμη από την ατμόσφαιρα και F_v η δύναμη που ασκεί το νερό στο έμβολο. Το έμβολο ισορροπεί, οπότε:



$$\Sigma F=0 \rightarrow F_v+w-F_{at}-F=0 \rightarrow$$

$$F=F_v+w-F_{at}=(p_{at}+\rho gh)A-p_{at}A+w=\rho ghA+w.$$

$$F=1.000 \cdot 10 \cdot 0,1 \cdot 1 \cdot 10^{-4}\text{N} + 0,2\text{N}=0,3\text{N}.$$

ii) Και πάλι το έμβολο ισορροπεί, οπότε, αν p η πίεση στην πάνω επιφάνειά του έχουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_v+w-F_{at}-F_1=0 \rightarrow p \cdot A+w-p_{at}A-F_1=0 \rightarrow$$

$$p=p_{at}+\frac{F_1-w}{A}=10^5\text{N/m}^2+\frac{2,2-0,2}{1 \cdot 10^{-4}}\text{N/m}^2=1,2 \cdot 10^5\text{N/m}^2 \quad (1)$$

Αλλά αν πάρουμε ένα σημείο του υγρού B σε επαφή με το δάκτυλό μας και ένα σημείο Γ σε επαφή με το έμβολο, όπου $p_\Gamma=p=1,2 \cdot 10^5\text{N/m}^2$, ισχύει:

$$p_\Gamma-p_B=\rho gh \rightarrow p_B=p_\Gamma-\rho gh \rightarrow$$

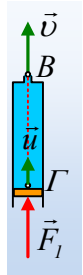
$$p_B = 1,2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 - 1.000 \cdot 10 \cdot 0,1 \text{ N/m}^2 = 1,19 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Οπότε και:

$$F_x = p_B \cdot A_l = p_B \cdot \frac{A}{5} = 1,19 \cdot 10^5 \frac{1 \cdot 10^{-4}}{5} \text{ N} = 2,38 \text{ N}$$

iii) Με βάση την εκφώνηση, σε ελάχιστο χρόνο, μόλις βγάλουμε το δάκτυλο, θα αποκατασταθεί μια μόνιμη και στρωτή ροή. Έστω \vec{v} η ταχύτητα εκροής στο σημείο B και \vec{u} η ταχύτητα ροής στο σημείο Γ μιας ρευματικής γραμμής, σε επαφή με το έμβολο, συνεπώς και η ταχύτητα του εμβόλου. Από την εξίσωση της συνέχειας, για τις αντίστοιχες διατομές στα σημεία B και Γ παίρνουμε:

$$A_\Gamma \cdot u = A_B \cdot v \rightarrow v = \frac{A_\Gamma \cdot u}{A_B} = \frac{A \cdot u}{\frac{1}{5}A} = 5u = 0,5 \text{ m/s}$$

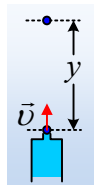


α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για ένα σωματίο ρευστού, ανάμεσα στη θέση B που εγκαταλείπει τη σύριγγα και το μέγιστο ύψος y που θα φτάσει και παίρνουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + 0 = 0 + mgy \rightarrow$$

$$y = \frac{v^2}{2g} = \frac{0,5^2}{2 \cdot 10} \text{ m} = 0,0125 \text{ m} = 1,25 \text{ cm}$$



β) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων B και Γ της ρευματικής γραμμής του σχήματος και παίρνουμε:

$$p_\Gamma + \frac{1}{2} \rho u^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h'$$

$$\text{Όπου } h' = h - y = h - ut$$

$$p_\Gamma = p_B + \frac{1}{2} \rho v^2 - \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g h - \rho g u t \rightarrow$$

$$p_\Gamma = 10^5 + \frac{1}{2} 1.000 \cdot (0,5^2 - 0,1^2) + 1.000 \cdot 10 \cdot 0,1 - 1.000 \cdot 10 \cdot 0,1 t$$

$$p_\Gamma = 101.120 - 100t \quad (\text{S.I.})$$

dmargaris@gmail.com