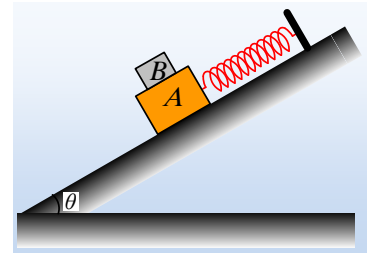


**Μια ταλάντωση και η τριβή.**

Ένα σώμα A μάζας  $M=3\text{kg}$  ηρεμεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως  $\theta$ , δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k=100\text{N/m}$ . Τη στιγμή  $t_0=0$ , αφήνουμε πάνω στο σώμα A, ένα δεύτερο σώμα B, μάζας  $m=1\text{kg}$ , το οποίο εμφανίζει με το σώμα A συντελεστή οριακής στατικής τριβής  $\mu_s=1$ .



- i) Τι θα συμβεί μόλις αφήσουμε ελεύθερο το B σώμα;
  - α) Θα ισορροπήσει.
  - β) Θα κινηθεί προς τα κάτω, γλιστρώντας πάνω στο A σώμα, το οποίο παραμένει στη θέση του.
  - γ) Θα κινηθεί προς τα κάτω, συμπαρασύροντας στην κίνησή του και το A σώμα.
- ii) Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα B.
- iii) Να αποδείξετε ότι το σύστημα των δύο σωμάτων A και B, θα εκτελέσει ΑΑΤ, υπολογίζοντας και το πλάτος ταλάντωσής του.
- iv) Θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, να βρεθεί η εξίσωση της επιτάχυνσης του συστήματος σε συνάρτηση με το χρόνο.
- v) Να γίνει η γραφική παράσταση της τριβής που ασκείται στο B σώμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ ,  $\eta\mu\theta=0,6$  και  $\sigma\eta\nu\theta=0,8$ .

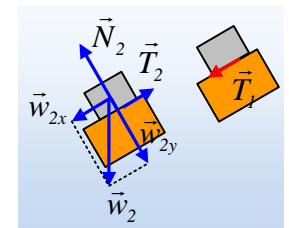
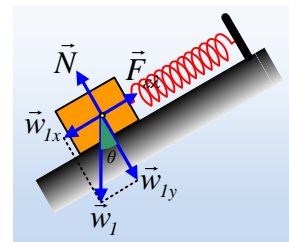
**Απάντηση:**

- i) Το σώμα A, πριν την τοποθέτηση πάνω του, του B σώματος ισορροπεί, ενώ πάνω του ασκούνται οι δυνάμεις που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα, οπότε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow k \cdot \Delta\ell_1 = Mg\eta\mu\theta \quad (1)$$

Όπου  $\Delta\ell_1$  η επιμήκυνση του ελατηρίου.

Μόλις τοποθετήσουμε πάνω του το B σώμα, αυτό τείνει να κινηθεί προς τα κάτω εξαιτίας της συνιστώσας  $w_{2x}=mg\cdot\eta\mu\theta$ , αλλά τότε θα δεχτεί δύναμη τριβής  $T_2$ , αντίθετης κατεύθυνσης, όπως στο διπλανό σχήμα. Η αντίδραση της τριβής αυτής, είναι η δύναμη  $T_1$  η οποία ασκείται στο A σώμα, το οποίο θα πάψει να ισορροπεί και θα κινηθεί και αυτό προς τα κάτω. Σωστή η γ) πρόταση.



- ii) Το ερώτημα που προκύπτει είναι, η ασκούμενη τριβή μεταξύ των δύο σωμάτων, είναι τριβή ολίσθησης ή στατική τριβή; Έστω ότι η ασκούμενη τριβή μεταξύ των δύο σωμάτων είναι στατική, οπότε τα σώματα θα κινηθούν μαζί με την ίδια επιτάχυνση. Εφαρμόζοντας το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα χωριστά και για τη στιγμή  $t_0$  παίρνουμε:

$$\Sigma F_{x1}=Ma \rightarrow Mg\eta\mu\theta+T_{s1}-F_{ελ}=Ma_0$$

$$\Sigma F_{x2}=ma \rightarrow mg\eta\mu\theta-T_{s2}=ma_0$$

Με πρόσθεση κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $T_{s1}=T_{s2}$  (ίσα μέτρα λόγω δράσης-αντίδρασης), ενώ  $Mg\cdot\eta\mu\theta=F_{ελ}$ , σχέση (1), παίρνουμε:

$$mg \cdot \eta\mu\theta = (M + m)a_0 \rightarrow$$

$$a_0 = \frac{mg \cdot \eta\mu\theta}{M + m} = \frac{1 \cdot 10 \cdot 0,6}{3 + 1} m/s^2 = 1,5 m/s^2.$$

Αλλά τότε επιστρέφοντας στο σώμα Β:

$$mg\eta\mu\theta - T_{s2} = ma_0 \rightarrow$$

$$T_{s2} = mg \cdot \eta\mu\theta - ma_0 = 1 \cdot 10 \cdot 0,6 N - 1 \cdot 1,5 N = 4,5 N$$

ενώ η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής, η οποία μπορεί να εμφανιστεί, η οριακή τριβή έχει μέτρο:

$$T_{op} = \mu_s \cdot N_2 = \mu_s \cdot mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 0,8 N = 8 N$$

αφού το σώμα ισορροπεί στην κάθετη προς το επίπεδο διεύθυνση και  $\Sigma F_y = 0$  ή  $N_2 = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ .

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ασκούμενη τριβή τη στιγμή  $t_0 = 0$ , είναι μικρότερη από την οριακή και το σώμα Β, δεν θα ολισθήσει πάνω στο Α σώμα, με αποτέλεσμα να κινηθούν μαζί με επιτάχυνση  $1,5 m/s^2$ .

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα των Α-Β, αντιμετωπίζοντάς το σαν ένα υλικό σημείο, στη θέση ισορροπίας και σε μια τυχαία θέση.

$$\Theta.I.: \Sigma F = 0 \text{ ή } \Sigma F_x = 0 \rightarrow w_x = F_{ελ} = k \cdot \Delta \ell \quad (2)$$

$$\Delta \ell = \frac{(M + m)g \cdot \eta\mu\theta}{k} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 0,6}{100} m = 0,24 m$$

$$T.\Theta. \Sigma F = \Sigma F_x = w_x - F'_{ελ} = w_x - k \cdot (\Delta \ell + x) \text{ ή λόγω (2)}$$

$$\Sigma F = \Sigma F_x = -k \cdot x$$

Συνεπώς το σύστημα εκτελεί ΑΑΤ γύρω από μια θέση, όπου το ελατήριο έχει επιμήκυνση  $\Delta \ell = 0,24 m$ , τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Αλλά από την σχέση (1):

$$k \cdot \Delta \ell_1 = Mg \eta\mu\theta \rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{Mg \eta\mu\theta}{k} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 0,6}{100} m = 0,18 m$$

συνεπώς η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, απέχει κατά  $0,24 m - 0,18 m = 0,06 m$  από την αρχική θέση που ξεκίνησε η ταλάντωση, με μηδενική ταχύτητα. Αλλά τότε η αρχική θέση, ήταν ακραία θέση της ταλάντωσης και  $A = 0,06 m$ .

iv) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του συστήματος, είναι της μορφής:

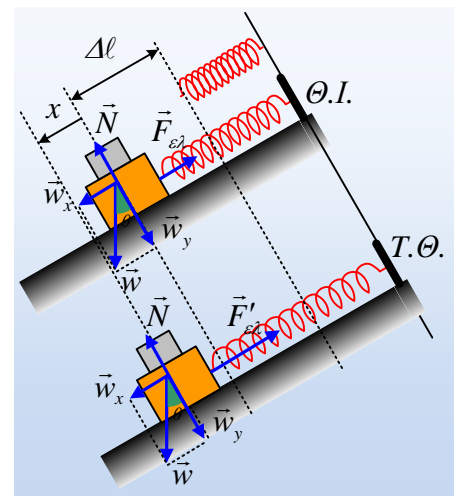
$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$$

$$\text{Αλλά } \omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}} = \sqrt{\frac{100}{3 + 1}} \text{ rad/s} = 5 \text{ rad/s}$$

Ενώ τη στιγμή  $t_0 = 0$ , το σώμα βρίσκεται στη θέση  $x = +A$ , οπότε με αντικατάσταση στην (3):

$$A = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Και η εξίσωση γράφεται:  $x = 0,06 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$  (S.I.)



Αλλά τότε η επιτάχυνση είναι της μορφής:

$$a = -\omega^2 x = -1,5 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

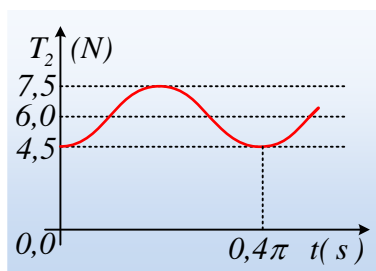
ν) Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για το Β σώμα και με δεδομένο ότι η προς τα πάνω φορά θεωρείται θετική, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = ma \rightarrow T_2 - mg \eta\mu\theta = ma \rightarrow$$

$$T_2 = mg \eta\mu\theta + ma = 1 \cdot 10 \cdot 0,6 - 1 \cdot 1,5 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$T_2 = 6 - 1,5 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης, είναι η παρακάτω:



### Σχόλιο:

Με βάση το παραπάνω διάγραμμα T-t βλέπουμε ότι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής που εμφανίζεται είναι 7,5N, ενώ η οριακή τριβή έχει μέτρο 8N. Οπότε πράγματι, όχι απλά δεν ολίσθησε το σώμα Β πάνω στο Α, τη στιγμή  $t_0$ , αλλά δεν πρόκειται και να ολισθήσει σε όλη τη διάρκεια της κοινής τους ταλάντωσης.

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)

